# Zkouška z Lineární Algebry

31.1.2013

## 1

### 1.1

Užitím Hornerova schéma dokažte, že číslo $\frac{1}{5}$ je kořenem polynomu P(x). Pak nalezněte všechny jeho kořeny.

$$P(x) = 5x^5 - x^4 - 80x + 16$$

### 1.2

Dokažte: Jsou-li $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektory z lineárního prostoru L a jestliže v L platí $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, pak $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = \left\langle \vec{b}, \vec{c} \right\rangle$. Symbol $\langle\,\rangle$ znamená lineární obal.

## 2

### 2.1

Diskutujte počet řešení následující soustavy v závislosti na parametrech $a, b \in \mathbb{R}$. Pak soustavu vyřešte.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & + & ax_2 & - & 2x_3 & = & b \\ -\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & -3 \end{array}$$

### 2.2

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

Nechť $\mathbf{C} = \mathbf{B} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 + \mathbf{A}^4 + \mathbf{A}^5 + \mathbf{A}^6 + \mathbf{A}^7$. Diskutujte hodnost $\mathbf{C}$ v závisloti na $\alpha$.
Návod: nejprve spočítejte: $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}.\mathbf{A}$

## 3

### 3.1

Nechť $\varrho$ je rovina zrcadla a nechť M a N jsou body na téže straně zrcadla. Předpokládejme, že paprsek prochází bodem M. V kterém bodě zrcadla se musí odrazit, aby po odrazu procházel bodem N?

M = [3, -1, 1]

N = [8, 3, 8]

$$\varrho : 2x - 2y + z = 0$$

Nápověda: uvažujte symetrii podle roviny zrcadla.

### 3.2

Technikou determinantu ukažte, že následující přímky p, q jsou mimoběžky.

$$p: \ X = [-5,-5,1] + t(3,2,-2),\ t \in \mathbb{R}$$

$$q: \ Y = [-2,-6,2] + u(6,-2,-1),\ u \in \mathbb{R}$$

Jakým číslem musíme nahradit souřadnici 2 (z-ová souřadnice) v „počátku" přímky q, aby vzniklá přímka byla různoběžná s p?

# 4

### 4.1

Nechť $l : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je lineární zobrazení dané následujícími podmínkami:

$$\begin{aligned} l\,(1,0,0) &= (2,3) \\ l\,(0,1,0) &= (1,-2) \\ l\,(0,0,1) &= (-1,1) \end{aligned}$$

Ověřte, že je toto zobrazení surjektivní (neboli „na"). Potom nalezněte všechny vzory vektoru $\vec{v} = (3,1)$.

### 4.2

Dokažte: Jsou-li matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ podobné, pak $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B}$.